L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d_1) \iff$ il existe $t' \in \mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{\text{AM}} = t'\overrightarrow{u_1} \iff$
$\left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 1t'\\ y-2 &=& 2t'\\ z-(-1) &=& 0t'\end{array}\right.\ t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t'\\ y &=& 2+2t'\\ z &=& -1\end{array}\right.\ t \in \mathbb{R}.$

2. On démontre que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

- (d_2) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$: les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.
- (d_1) et (d_2) sont sécantes s'il existe t et t' deux réels tels que :

$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& 1+t'\\ 1+t &=& 2+2t'\\ 2+t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 &=& t'\\ t &=& 1+2t'\\ t &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 &=& t'\\ t &=& -1\\ t &=& -3\end{array}\right.$: ce système n'a pas de solution.

Conclusion : les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

On va justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.

Si un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan défini par le point A et les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$, on sait que il existe α et β tels que : $\overrightarrow{\text{AM}} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{w}$,

soit avec les coordonnées : $\left\{\begin{array}{lcl} x-1 &=& 1\alpha+2\beta\\ y-2 &=& 2\alpha-1\beta\\ z+1 &=& 0\alpha+1\beta\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \alpha+2\beta+1\\ y &=& 2\alpha-\beta+2\\ z &=& \beta-1\end{array}\right.$

Or quels que soient α et β :

$-2(\alpha+2\beta+1)+1(2\alpha-\beta+2)+5(\beta-1)+5 = -2\alpha-4\beta-2+2\alpha-\beta+2+5\beta-5+5=0.$

Donc une équation cartésienne du plan est $-2x+1y+5z+5=0$.

4. **a.** On a vu que (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires donc (d_2) ne peut appartenir au plan précédent et (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles donc la droite (d_2) est sécante au plan $\mathscr{P}$.

Autre méthode : d'après ses équations paramétriques un vecteur directeur de la droite (d_2)est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et d'après l'équation de $\mathscr{P}$ un de ses vecteurs normaux est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5)\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{n} = 0+1+5=6 \neq 0$ ceci montre que (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$: (d_2) et $\mathscr{P}$ sont donc sécants.

b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

Si F est commun à (d_2) et au plan $\mathscr{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\\ -2x+y+5z+5 &=& 0\end{array}\right.$, d'où en remplaçant dans la dernière équation :

$-2\times 0+1+t+5(2+t)+5=0 \iff 1+t+10+5t+5=0 \iff 6t+16=0 \iff t=-\dfrac{8}{3}$, d'où en remplaçant dans x, y, et z, on obtient $\mathrm{F}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\-\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$ on déduit que :

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{u_1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}+0=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{u_2}=0-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}=0$.

Conclusion : $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites (d_1) et (d_2), $\mathrm{E}\in(d_1)$ et $\mathrm{F}\in(d_2)$ donc EF est bien la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

b. On a $\mathrm{EF}^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{6}{9}$.

Conclusion : $\mathrm{EF}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.